Freiherr- vom- Stein Schule Hessisch Lichtenau

# Kettenlinien anhand der Colonia Güell Kirche von Antoni Gaudi

Eine Jahresarbeit in Mathematik von:
Johanna Stiegler

Fachlehrer: Herr Pfaffenbach

Großalmerode,
Oktober 2011- April 2012

# Inhaltsverzeichnis:

# Vorwort:

Ich hatte den Wunsch, meine Jahresarbeit in Mathematik zu schreiben, da es ein Fach ist, welches in mir sehr großes Interesse geweckt hat.
Herauszufinden, wie bestimmte mathematische Gesetze in die Realität umgesetzt wurden, finde ich höchst faszinierend.
Mein Mathelehrer Herr Pfaffenbach gab mir das Thema „Kettenlinien anhand der Colonia Güell Kirche von Antoni Gaudi" vor, ein Thema, welches Geschichtliches mit Mathematischem vereint.
Da die Kettenlinie fast wie eine Parabel aussieht, jedoch keine ist, stellte sich für mich die Frage, welche besonderen Merkmale Diese aufweist und wieso sie in zahlreichen Bauwerken als Konstruktion zu finden ist.
Ein Beispiel für ein bekanntes Bauwerk, die die Konstruktion in Form einer Kettenlinie beinhaltet, ist die Colonia Güell Kirche. Es ist eine Kirche, die nie fertig gestellt wurde, von der bis heute nur das Untergeschoss existiert. Wieso die Kirche niemals fertig gestellt wurde, war mir ein Rätsel und regte mich zu einigen Recherchen an.
Die Aufgabe eine eigene Kettenlinie anhand eines abgebildeten Bogens zu entwerfen, bereitete mir zu Anfang kleinere Schwierigkeiten, die ich aber nach einiger Zeit erfolgreich bewältigen konnte.

# Allgemeine Informationen über Antoni Gaudi:

Antoni Gaudi i Cornet ist einer der bedeutensten Architekten der *Modernisme catala,* ein katalanischer Architekturstil.

## Seine Lebenszeit:

Antoni Gaudi wurde am 25. Juni 1852 in Spanien, in der Stadt Reus geboren. Sein Vater war Kupferschmied und lehrte ihn früh den Umgang mit geometrischen Formen. Sein Architekturstudium absolvierte er 1873-1878 an der Piaristenpatres[1] in Reus und an der Architekturschule in Barcelona. Er war kein besonders guter Schüler und auch der Direktor hatte seine Zweifel an Gaudi. In einem Kommentar über seinen Schüler sagt er: *„Qui sap si hem donat el diploma a un boig o a un geni: el temps ens ho dirà.“* („Wer weiß, ob wir den Titel einem Verrückten oder einem Genie gegeben haben – nur die Zeit wird es uns sagen.“)[2]
Am 10. Juni 1926 verstarb Antoni Gaudi allerdings wegen eines Verkehrsunfalls in Barcelona.

## Gaudis Architekturstil:

Antoni Gaudi besitzt einen einzigartigen Architekturstil, der durch geschwungene Linien und natürliche Grundrisse geprägt ist. Rechte Winkel sind in seinen Bauten nahezu keine zu finden, da er sehr hohen Wert auf „natürliche Formen“ legte. Des Weiteren sind sie mit phantasievoll gestalteten Dächern und bunten Mosaikbildern ausgeschmückt und auch Motive der Flora und der Fauna lassen sich in großer Anzahl wiederfinden.
Als Konstruktionsprinzip seiner Bauten verwendete er häufig das Hängemodell einer Kettenlinie, da Diese eine enorme Stabilität mit sich bringt und somit die schwere Last der Bauten ohne Probleme tragen kann.

[1] Katholische Männer- Ordensgemeinschaft
[2]Zitat des Direktors aus:
http://www.rutadelmodernisme.com/default.aspx?idioma=ca&contenido=body_rutamodernisme_011.htm

## Seine berühmtesten Werke:

Sein berühmtestes Werk ist die Kathedrale Sagrada Familia in Barcelona. Sie ist noch heute nicht fertig gestellt, da Antoni Gaudi während der Bearbeitung dieses Projekts verstarb. Dennoch ist die Kathedrale Sagrada Familia ein Wahrzeichen von Barcelona und eines der meistbesuchten Sehenswürdigkeiten in Spanien.
Weitere berühmte Werke Gaudis sind unter anderem der Park Güell in Barcelona, diverse Wohnhäuser wie: Die Villa Quijano, das Casa de los Botines oder das Casa Calvet und vor allem auch die Colonia Güell Kirche, zu der auf den folgenden Seiten nähere Informationen dargelegt werden.

Abbildung 1: Architekt Antoni Gaudi im Alter von 26 Jahren

# Die Colonia Güell Kirche

## Ihr Standort:

Die Colonia Güell Kirche ist eine katholische Kirche in einer Arbeitersiedlung in Santa Colonia dé Cervello.[3]

[3] Eine Stadt in Spanien, ca, 15 km von Barcelona entfernt

## Geschichtliche Hintergründe der Colonia Güell Kirche:

Der Bau der Colonia Güell Kirche begann im Jahre 1908. Antoni Gaudi wurde bereits 1898 von dem Namensträger der Kirche und Eigentümer der Arbeitersiedlung Eusebi Güell beauftragt, die Kirche als Gebetsstätte für seine Siedlung zu bauen.

Die Planungsphase dauerte jedoch 10 Jahre, da es nicht einfach war, Gaudis spezielle Ideen in die Realität umzusetzen.

Der Bau der Colonia Güell Kirche wurde 1914 aus finanziellen Gründen abgebrochen, da die Familie Güell dieses Projekt nicht mehr weiter finanzieren wollte.

Abbildung 2: Außenansicht der Colonia Güell Kirche

Fertig gestellt wurde nur das Untergeschoss der Kirche, welches heute als Krypta bezeichnet wird, der Portikus[4] und die Treppe, die in das zweite Stockwerk der Kirche führen sollte.

Der restliche Teil der Kirche ist bis heute unvollendet geblieben, trotzdem wurde die Kirche 2005 in die Liste des UNESCO- Weltkulturerbes aufgenommen.

## Bauweise:

Da es Gaudis Idee war, der Kirche eine Grundkonstruktion aus Säulenbögen zu geben, berücksichtigte er in seinen Planungen die Konstruktion der Kettenlinie. Sie kann dem aufwändigen Gebäude Stabilität sichern und somit eine hohe Traglast garantieren. Er konstruierte für die Planung ein Hängemodell, mit dem Prinzip der umgekehrten Kettenlinien.

[4] Als Portikus wird in der Architektur ein Säulengang bezeichnet

## Erklärung des Hängemodells:

Das Hängemodell war ca. 6 m lang und 4 m breit und bestand aus Fäden, Tüchern, Seilen und gefüllten Säcken als Ballast, um die später entstehenden Gewölberippen zu entwerfen. Er entwickelte das Modell im Maßstab 1:10 und in einem Gewichtsmaßstab von 1:10 000. Dies ermöglichte ihm, dass er die umgerechneten Abmessungen des Hängemodells ohne Probleme in der reellen Bauphase der Kirche übertragen konnte.

Die Kirche besteht insgesamt aus zahlreichen Kettenlinien, als Säulenbögen und Flächen aus Backstein in Form eines Hyperbolischen Paraboloids[5] für die Außenmauern und die Wölbungen im Inneren der Kirche.
Da Gaudi ein naturverbundener Künstler war, sollte sich auch das Aussehen der Kirche mit der Natur vereinen können. Er vereinte Materialien, wie Backstein, Naturstein und Keramik in Form von Mosaiken, welche einen farbenfrohe-, natürliche- und warme Atmosphäre schaffen.
Antoni Gaudi selbst sagte über sein Bauwerk: *„Die beständige Schöpfung und der Schöpfer bedienen sich ihrer Kreaturen. Jene, die die Gesetze der Natur zu ergründen suchen, um neue Werke zu schaffen, arbeiten mit dem Schöpfer Hand in Hand.“*[6]

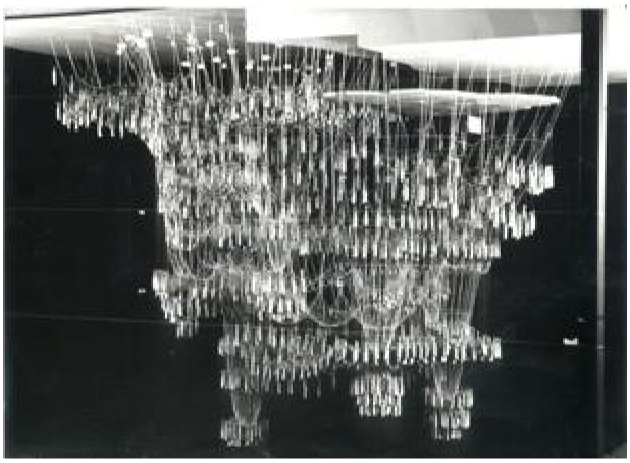


Abbildung 4: Rekonstruktion des Hängemodells von Rainer Graefe, Frei Otto, Jos Tomlow und Arnold Walz

Abbildung 3: Hängemodell der Colonia Güell Kirche

[5] Eine Fläche zweiter Ordnung. Jeder Schnitt mit einer Ebene ergibt einen Kegelschnitt.
[6] Zitat von Antoni Gaudi aus dem Buch: GAUDI, der Künstler und sein Werk (S.200), von Joan Bergos i Masso und Marc Llimargas

# Kettenlinien:

## Allgemeine Definition einer Kettenlinie:

Eine Kettenlinie, auch Katenoide oder Seilkurve genannt, ist eine Kurve; die einer Parabel verblüffend ähnlich sieht. Auf den ersten Blick unterscheiden sich diese kaum. Die Kettenlinie ist freihängend und wird nur von zwei Punkten gehalten. Sie ist nur durch ihr Eigengewicht belastet, weshalb sie in umgekehrter Form für aufwändige und schwere Bauwerke ein hervorragender Träger ist.

Sind die tragenden Säulen eines Bauwerkes in Form von Kettenlinien konstruiert, dann können sie die höchsten Lasten eines Bauwerks tragen. In diesem Zustand ist ihre potentielle Energie am geringsten. Sie produzieren also fast keine Last selbst und sind so in der Lage, höhere Gewichte zu ertragen, als gewöhnliche Stützsäulen.

Die Bezeichnung dieser Kurve als „Kettenlinie" stammt daher, dass eine Kette ebenfalls an zwei Punkten aufgehängt wird und die Seilkurve somit die gleiche Form und auch die selbe Funktion erhält.

Die allgemeine Funktion der Kettenlinie ist eine Cosinus Hyperbolicus Funktion[7] und wird als cosh- Funktion abgekürzt.
Die Funktionsgleichung der Kettenlinie wird beschrieben, mit:

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

Der Betrag a hängt hierbei nur von der Länge der Kettenlänge und ihrer Aufhängepunkte ab.
Kettenlinien verfügen über keinerlei Nullstellen. Der Grund hierfür wird auf Seite 11 noch etwas genauer verdeutlicht.

[7] Mathematische Hyperbelfunktion (vgl: http://de.wikipedia.org/wiki/Hyperbelfunktion)

## Eigenschaften der Kettenlinie:

- Der Y-Achsenabschnitt wird durch a definiert.
- Ist a < 0, so ist der Y-Achsenabschnitt gleichzeitig das Minimun der Funktion.
- Bei einem negativen Wert für a ist der Y-Achsenabschnitt zugleich das Maximum
- Hat die Funktion einen negativen Wert für a, so ist die gesamte Kurve an der X-Achse gespiegelt.
- Je Größer der Wert a wird, desto flacher verläuft eine Kettenlinie

## Vergleich zwischen einer Kettenlinie und einer Parabel:

Galileo stellte einst die Vermutung auf, die Kurve einer herunterhängenden Kette ließe sich mit der einer Parabel beschreiben.
Diese begründete er mit folgender Überlegung: „Während die Wurflinie eines Projektils von zwei Kräften beherrscht wird, einer vorwärtstreibenden, horizontal wirkenden und einer herunterziehenden des Gewichts, wird auch ein Seil von einer horizontal ziehenden und einer durch das Gewicht bedingten Kraft verformt. Beides seien sehr ähnliche Vorgänge“[8]
Seine Vermutung wurde im Laufe der Zeit jedoch von zahlreichen Physikern und Mathematikern, wie Christiaan Huygens[9] oder Gottfried Wilhelm Leibniz[10] widerlegt.

Kettenlinien und Parabeln sehen sich äußerlich auf den ersten Blick sehr ähnlich, man bemerkt jedoch beim genaueren Betrachten, dass die Kettenlinien einen anderen Kurvenverlauf als Parabeln annehmen. Sie verlaufen, wenn man die ganze Kurve betrachtet, viel steiler, unten haben sie jedoch einen viel flacheren Verlauf.
In der folgenden Grafik wird der unterschiedliche Kurvenverlauf sichtbar dargestellt. Während die schwarze Kurve eine gewöhnliche Parabel darstellt, bezeichnet die Rote eine Kettenlinie.

---

[8] Begründung von Galileo Galilei aus dem Buch: Geschichte der Baustatik von Karl-Eugen Kurrer, S. 126)
[9] Niederländischer Astronom, einer der führenden Mathematiker und Physiker des 17. Jahrhunderts (1629-1695)
[10] Bedeutender Philosoph und Wissenschaftler im 17. Jahrhundert (1646-1716)

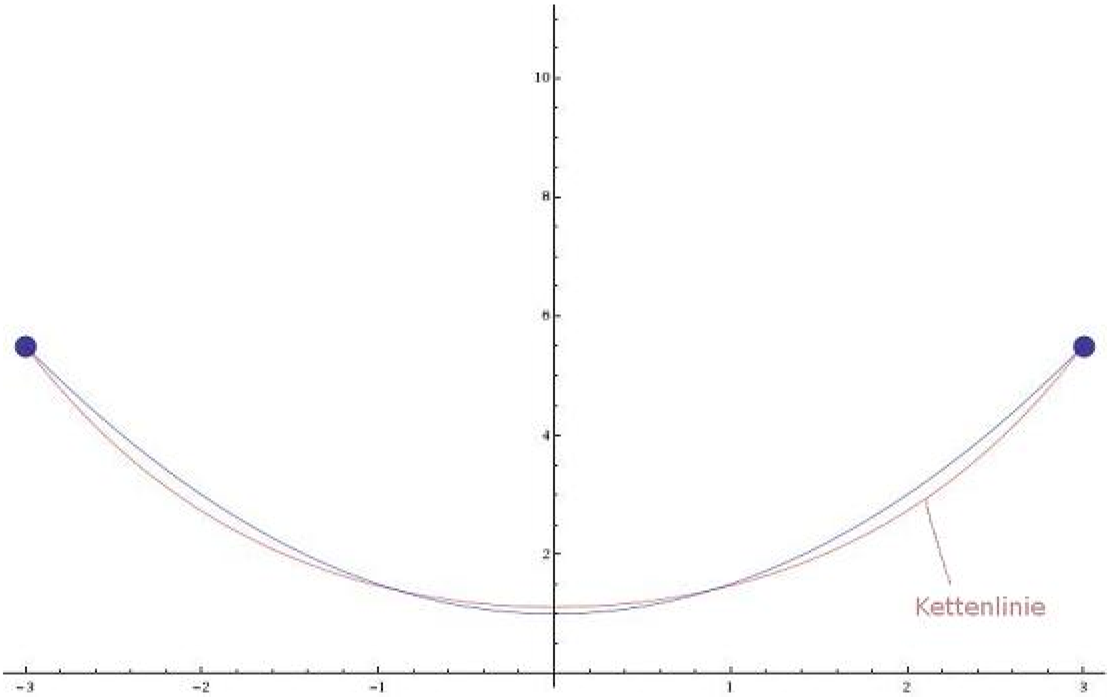



Abbildung 5: Kettenlinie und Parabel mit der gleichen Länge und den selben Befestigungspunkten.

Eine Kettenlinie kann in gewissen Fällen aber zur Parabel verändert werden.
Man betrachte hierbei einmal das Prinzip der Hängebrücken. Bei diesem Prinzip werden die Kettenlinien in ihrer ursprünglichen Form, also nicht umgekehrt, an zwei Punkten befestigt. In diesem Fall haben sie die Aufgabe, die Brücke zu halten.
Bei Hängebrücken wird allerdings jedes Glied der Kettenlinie durch eine verhältnismäßig große Masse belastet, sodass aus der Form der Kettenlinie eine Parabel entsteht. Diese Abbildung zeigt eine solche parabelförmige Hängebrücke.

Abbildung 6: Die längste deutsche Hängebrücke, die Rheinbrücke Emmerich

Im Allgemeinen unterscheiden sich Kettenlinien aber schon in ihrer Funktionsgleichung und Ableitungen von Parabeln.

Die Funktionsgleichung der Kettenlinie lautet:

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

Die Ableitungen dieser Funktion lauten:

- $f'(x) = \sinh(x)$ oder $f'(x) = \frac{a}{2}(e^{-\frac{x}{a}} * (-1) + e^{\frac{x}{a}})$ → $f'(x) = \frac{a}{2}(-e^{-\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}})$
- $f''(x) = \cos(x)$ oder $f''(x) = \frac{a}{2}(-e^{-\frac{x}{a}} * (-1) + e^{\frac{x}{a}})$ → $f''(x) = \frac{a}{2}(e^{-\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}})$ → $f(x)$
- $f'''(x) = f'(x)$

Die Funktionsgleichung einer Parabel lautet aber:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ihre Ableitungen lauten:

- $f'(x) = 2ax + b$
- $f''(x) = 2a$

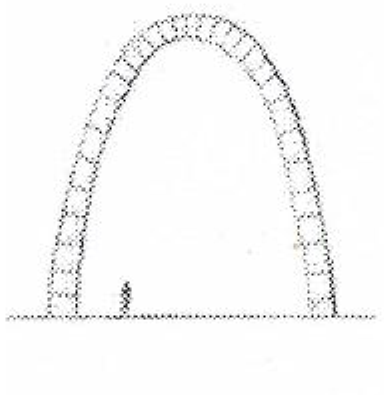
Auch wenn man nur die Nullstellen berücksichtigt, erfährt man, dass eine Kettenlinie aufgrund der Eulerschen Zahl[11] $e^x$ überhaupt keine Nullstellen besitzt, da $e^x$ niemals die Zahl Null annehmen kann.

[11] Die Eulersche Zahl wird auch als e-Funktion bezeichnet

Ein wesentlicher Unterschied besteht also darin, dass Parabeln Nullstellen haben und Kettenlinien nicht. Auch wenn Parabeln nicht immer Nullstellen besitzen. Kettenlinien besitzen jedoch nie welche.
Nun lässt sich sozusagen ein „Beweis“ aufstellen, dass eine Kettenlinie keine Parabel sein kann.

## Eigene Entwicklung einer Kettenlinie:

Um diese Feststellung etwas anschaulicher zu verdeutlichen, habe ich eine Kettenlinie entwickelt, welche den Bogen auf der folgenden Seite annähernd beschreibt:



Da keinerlei Angaben zu diesem Bogen gegeben sind, kann man sich seine Höhe ungefähr berechnen.
Wenn man davon ausgeht, dass die Person, die unter diesem Bogen steht, ein Größe von ca: 1,77 m[12] hat, zählt man, wie oft diese Person sozusagen „übereinander gestapelt“ werden kann, bis sie den höchsten Punkt des Bogens erreicht.
Meinen Berechnungen zufolge, ist der Bogen 8 ½ mal so groß, wie die Person selbst, also 15,045 m hoch. Diese Zahl habe ich nun auf genau 15 m gerundet, um eine einfachere Rechnung erzielen zu können.
Da Kettenlinien eine Symmetrie zur Y-Achse haben, ist der höchste Punkt des Bogens, also die 15 m, zugleich der Y-Achsenabschnitt und damit auch das gesuchte a.

Die allgemeine Formel lautet:

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

[12] Diese Größe wurde mit Absicht von mir gewählt, um als Ergebnis der Bogenhöhe ein annähernd gerades Ergebnis zu erzielen.

Überprüfung des Y-Achsenabschnitts:

$$f(0) = \frac{a}{2}(e^{0} + e^{-0}) = 15$$

$x = 0 = 15$ $f_a(0) = 15$ $a = 15$

Diese Kettenlinie wird somit durch diese Funktionsgleichung beschrieben:

$$f_{15}(x) = \frac{15}{2}(e^{\frac{x}{15}} + e^{-\frac{x}{15}})$$

Um sich nun ein genaueres Bild dieser Kettenlinie zu machen, habe ich sie in Geogebra[13] konstruiert: Sie verläuft allerdings genau entgegengesetzt des abgebildeten Bogens, da ein Hängemodell bekanntlich aus dem Prinzip der umgekehrten Kettenlinie besteht.

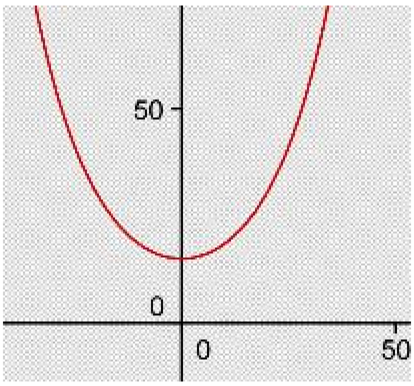
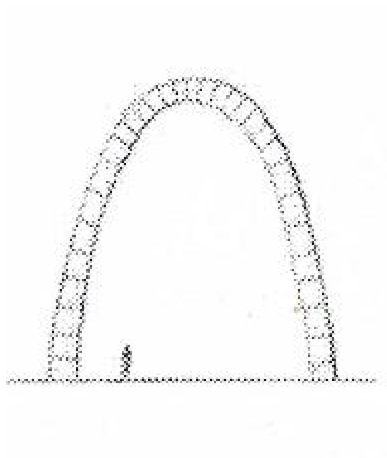



Abbildung 7: Die mit Geogebra gezeichnete Kettenlinie



Der zu beschreibende Bogen

## Beweis, dass diese Kettenlinie keine Parabel ist:

Um nun noch zu verdeutlichen, dass diese Kettenlinie keine Parabel ist, habe ich eine Parabel ausgewählt, welche mit dieser Kettenlinie rein äußerlich exakt übereinstimmt.

[13] Mathematische Software zum Konstruieren und Berechnen von mathematischen Figuren

Jetzt setzt man beliebige Punkte, die auf der Parabel liegen, ein und kann somit erkennen, dass es sich bei diesem Bogen niemals um eine Parabel handeln kann.

Die Funktionsgleichung der von mir ausgewählten Parabel lautet:

$$f(x) = \frac{1}{20}x^2 + 15$$

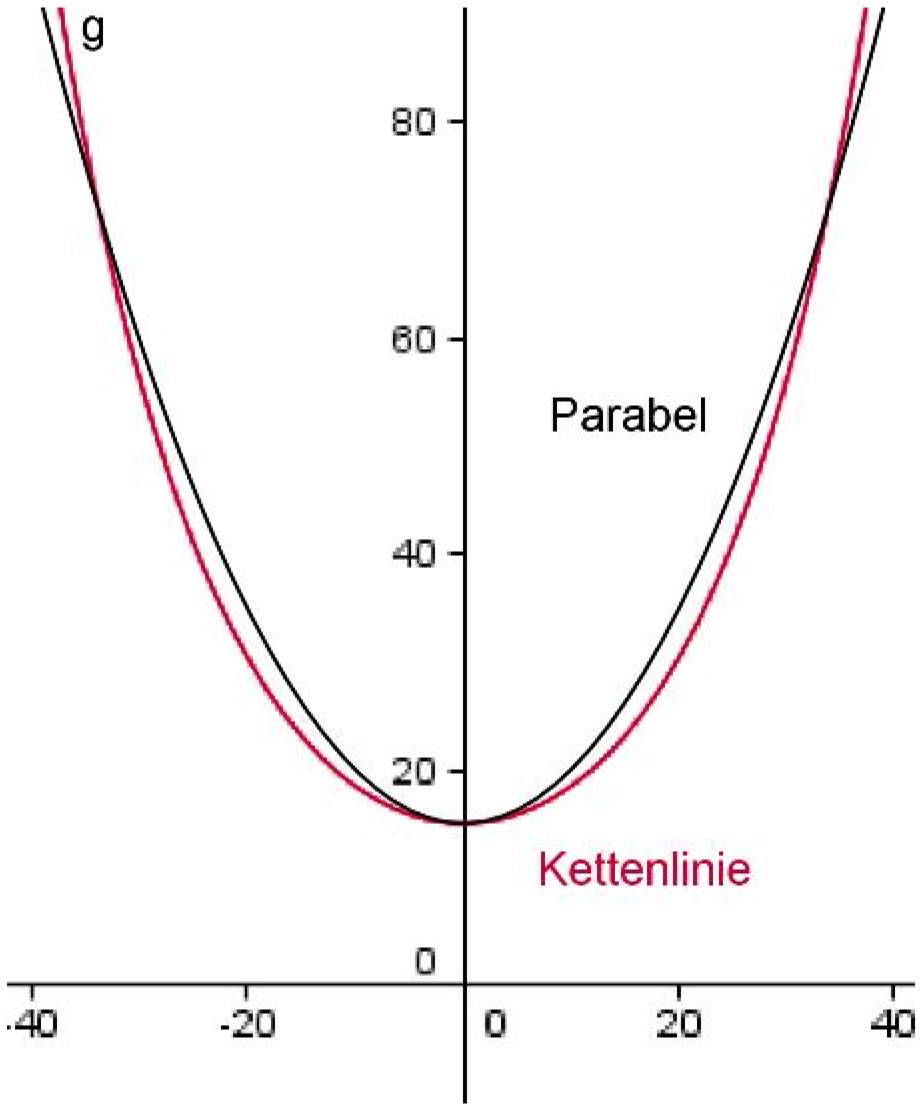



Abbildung 8: Parabel und Kettenlinie im Vergleich

Diese Abbildung zeigt beide Kurven gezeichnet. Man kann schon jetzt erkennen, dass sie nicht identisch sein können. Hier ist nun der rechnerische Beweis:

Ich habe in beide Gleichungen die Punkte $x=1$, $x=5$ und $x=10$ eingesetzt. Hierbei kamen folgende Ergebnisse heraus:

KETTENLINIE:

$$f_{15}(x)=\frac{15}{2}(e^{\frac{x}{15}}+e^{-\frac{x}{15}})$$

$x=1$ → $f(x)=\frac{15}{2}(e^{\frac{1}{15}}+e^{-\frac{1}{15}})=15{,}033\,\text{m}$

$x=5$ → $f(x)=\frac{5}{15}(e^{\frac{5}{15}}+e^{-\frac{5}{15}})=15{,}841\,\text{m}$

$x=10$ → $f(x)=\frac{10}{15}(e^{\frac{10}{15}}+e^{-\frac{10}{15}})=18{,}459\,\text{m}$

PARABEL:

$$f(x)=\frac{1}{20}x^2+15$$

$x=1$ → $f(x)=\frac{1}{20}*(1)^2+15=15{,}05\,\text{m}$

$x=5$ → $f(x)=\frac{1}{20}*(5)^2+15=16{,}25\,\text{m}$

$x=10$ → $f(x)=\frac{1}{20}*(10)^2+15=20\,\text{m}$

Beide Kurven liefern beim Einsetzen aller drei Punkte unterschiedliche Ergebnisse, woraus sich beweisen lässt, dass diese Kettenlinie auf keinen Fall eine Parabel sein kann.

Wenn es eine Parabel sein würde, dann müssten sowohl die Parabel als auch die Kettenlinie beim Einsetzen aller drei Punkte jeweils die gleichen Ergebnisse haben.

## Nachwort:

Zu Beginn meiner Jahresarbeit wusste ich sehr wenig über Kettenlinien und derartig verwendete Konstruktionen in der Architektur. Mir war auch nicht bewusst, welche Vorteile Kettenlinien erzeugen können.
Weil mir der mathematische Teil meiner Jahresarbeit zunächst ein wenig unklar erschien, bevorzugte ich erst einmal die geschichtlichen Aspekte über Antoni Gaudi und die Colonia Güell Kirche.
Ich muss offen zugeben, dass mich dieser Architekt sehr überrascht hat, denn solch eine Naturverbundenheit, kombiniert mit Mosaiken und geometrischen Formen habe ich selten gesehen. Ich habe vor der Recherche für meine Jahresarbeit noch nie etwas über Antoni Gaudi gehört, doch mittlerweile kann ich behaupten, großes Interesse an seinen vielfältigen Bauwerken zu haben.
Die Formel der Kettenlinie nachvollziehen zu können, viel mir jedoch schwerer, als ich zu Anfang erwartet hatte. Auch die Herleitung habe ich nicht richtig verstehen können, da eine Kettenlinie sehr viel mit Physik zu tun hat und ich die physikalische Herleitung der Formel nach großen Bemühungen immer noch nicht nachvollziehen konnte.
Deshalb habe ich beschlossen, die Physikalische Herleitung der Formel für eine Kettenlinie nicht in meine Jahresarbeit nicht mit einzubeziehen.
Ich halte es dagegen für wichtiger, die Dinge, welche man in seiner Jahresarbeit präsentiert, zu verstehen, als Dinge hineinzuschreiben, die man selbst schlecht nachvollziehen kann.
Im Großen und Ganzen hat mir die Bearbeitung meiner Jahresarbeit überraschenderweise große Freude bereitet, denn etwas über Mathematik in Verbindung mit der Architektur zu lernen, war für mich sehr interessant.

# Quellenangaben:

## Literaturverzeichnis:


- GAUDI, Der Künstler und sein Werk von Joan Bergos i Masso und Marc Llimargas; Hatje Cantz Verlag (2000)
- Geschichte der Baustatik von Ernst- Eugen Kurrer; Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG (korrigierter Nachdruck 2003)


## Abbildungsverzeichnis:


- **Abbildung Deckblatt:** entnommen am 10.04.12

*http://2.bp.blogspot.com/_A6KXGICe4is/TIO1r5Thv6I/AAAAAAAASlQ/m0hYFIbufHs/s1600/IMG_5850.JPG*

- **Abbildung 1:** entnommen am 02.04.12

*http://www.gaudidesigner.com/data/article/69.jpg*

- **Abbildung 2:** entnommen am 11.04.12

*http://www.quisquis.es/wp-content/uploads/2008/04/colonia-guell-cripta.jpg*

- **Abbildung 3:** entnommen am 02.04.12

*http://www.ibb.uni-stuttgart.de/publikationen/fulltext/2011/walser_2011.pdf*

- **Abbildung 4:** entnommen am 02.0.12

*http://tu-dresden.de/die_tu_dresden/fakultaeten/fakultaet_architektur/twp/studium/diplom/haengemodell (Quelle des farbigen Bildes, da die Internetseite des Originalbildes nicht mehr verfügbar ist.)*

- **Abbildung 6:** entnommen am 13.04.12

*http://www.bernd-nebel.de/bruecken/6_technik/haenge/bilder/haenge_8.jpg*

- **Abbildung 7 und 8:** entnommen am 13.04.12

*Selbst mit Geogebra erstellte Kurven*

# Internetquellen (Anhang):


- *http://www.spanien-bilder.com/spanische_geschichte/antoni-gaudi/antoni-gaudi-biografie.php;* entnommen am 10.03.12

- *http://www.barcelona.de/de/barcelona-persoenlichkeiten-antoni-gaudi.html;* entnommen am 10.03.12

- *http://de.wikipedia.org/wiki/Antoni_Gaud%C3%AD;* entnommen am 10.03.12

- *http://de.wikipedia.org/wiki/Modernisme;* entnommen am 12.03.12

- *http://www.kirchenbau-dokumentation.de/dokbuero/result1_d.php?key=202;* entnommen am 17.03.12

- *https://www.drp-kulturtours.de/news/news_464.php?newsnr=464;* entnommen am 15.03.12

- *http://de.wikipedia.org/wiki/Col%C3%B2nia_G%C3%BCell#Die_Krypta_von_Gaud.C3.AD;* entnommen am 15.03.12

- *http://www.mathematische-basteleien.de/kettenlinie.html;* entnommen am 01.04.12

- *http://www.arndt-bruenner.de/mathe/java/kettenlinie.htm;* entnommen am 03.04.12

- *http://teacher.eduhi.at/alindner/Dyn_Geometrie/kettenlinie/;* entnommen am 28.03.12

- *http://de.wikipedia.org/wiki/Katenoide;* entnommen am 02.04.12

- *http://www.gym-rathenau.bildung-lsa.de/Mathe/Ana/Doku/Kettenlinie_Fu.pdf;* entnommen am 28.03.12 *(Seite als Druckvorschau gesperrt)*

- *http://www.gris.informatik.tu-darmstadt.de/lehre/seminarpraktikum/pm+medicomp/ws0809/slides/04_Snakes_Handout.pdf;* entnommen am 06.04.12 *(Seite als Druckvorschau gesperrt)*

- *http://13ma3.sablowski.info/kapitel.pdf (Seite 17-18);* entnommen am 02.04.12 *(Seite als Druckvorschau gesperrt)*